פתרון תרגיל 9 ביסודות תורת הפונקציות המרוכבות

1. צ"ל שאם $u(x,y)$ הרמונית, אז $v(x,y)$ המוגדרת ע"י: $v(x,y)=\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)dt-\int_0^x \frac{\partial u}{\partial y}(s,0)ds$ הינה צמודה הרמונית של u. מספיק לבדוק ש u, v מקיימות את משוואות קושי-רימן

$$\underline{\frac{\partial v}{\partial x}}=\frac{\partial}{\partial x}\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\,dt-\frac{\partial}{\partial x}\int_0^x \frac{\partial u}{\partial y}(s,0)ds=$$

$$=\int_0^y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\,dt-\frac{\partial u}{\partial y}(x,0)=\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\ \text{לכן}\ \text{הרמונית}\ u\right]=$$

$$=-\int_0^y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,t)\,dt-\frac{\partial u}{\partial y}(x,0)=-\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)+\frac{\partial u}{\partial y}(x,0)-\frac{\partial u}{\partial y}(x,0)=$$

$$=\underline{-\frac{\partial u}{\partial y}}$$

באותו אופן, $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}$ לכן v צמודה הרמונית של u.

2. צ"ל כי הפונקציה $u(x,y)=y\cos y\sinh x+x\sin y\cosh x$ הרמונית ולמצוא צמודה הרמונית. (נסמן $z=x+iy$)

$$\underline{u(z)}=y\cdot\frac{1}{2}(e^{iy}+e^{-iy})\cdot\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})+x\cdot\frac{1}{2i}(e^{iy}-e^{-iy})\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})=\frac{1}{4}y(e^{x+iy}-e^{-x-iy}+e^{x-iy}-e^{-x+iy})+$$

$$+\frac{1}{4i}x(e^{x+iy}-e^{-x-iy}+e^{-x+iy}-e^{x-iy})=$$

$$=\frac{1}{4i}iy(e^{z}-e^{-z}+e^{\bar z}-e^{-\bar z})+\frac{1}{4i}x(e^{z}-e^{-z}+e^{-\bar z}-e^{\bar z})=$$

$$=\frac{1}{4i}\left[e^{z}(x+iy)-e^{-z}(x+iy)-e^{\bar z}(x-iy)+e^{-\bar z}(x-iy)\right]=$$

$$=\frac{1}{4i}\left[ze^{z}-ze^{-z}-\bar z e^{\bar z}+\bar z e^{-\bar z}\right]=$$

$$=\frac{1}{4i}\left[z(e^{z}-e^{-z})-\bar z(e^{\bar z}-e^{-\bar z})\right]=\frac{1}{2i}\left[z\sinh z-\overline{z\sinh z}\right]=$$

$$=\underline{\operatorname{Im}(z\sinh z)}$$

לכן u הרמונית כחלק מדומה של פונקציה אנליטית ולכן צמודה הרמונית - $\underline{\operatorname{Re}(z\sinh z)}$.

3. $u(x,y)$, $v(x,y)$ הרמוניות ב- Ω, נניח בנוסף, כי מתקיימות משוואות קושי-רימן מתקיימות ; $u^2+v^2\neq 0$.

מההנחות על u, v, $f:=u+iv$ אנליטית ב- Ω ולא מתאפסת (כי $|f|=u^2+v^2\neq 0$) לכן $\frac{f'}{f}$ אנליטית ב- Ω. נזכור כי $f'=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$ לכן

$$\frac{f'}{f} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}}{u+iv} \cdot \frac{u-iv}{u-iv} = \frac{u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x}}{u^2+v^2} + i\,\frac{u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial x}}{u^2+v^2}$$

בגלל $\underline{\left(\frac{u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x}}{u^2+v^2}\right) = Re\,\frac{f'}{f}}$ הרמונית ולכן Δ שלה הוא 0.

4. להוכיח נוסחה לאופרטור לפלס בקואורדינטות קוטביות.

נזכור כי $r = \sqrt{x^2+y^2}$ ו- $\theta = arctg\,\frac{y}{x}$ לכן

$$\frac{\partial r}{\partial x} = 2x \cdot \frac{1}{2} \cdot (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} \cdot r\cos\theta = \underline{\cos\theta}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = 2y \cdot \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} \cdot r\sin\theta = \underline{\sin\theta}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{-y}{x^2} = -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{r\sin\theta}{r^2} = \underline{-\frac{\sin\theta}{r}}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{r\cos\theta}{r^2} = \underline{\frac{\cos\theta}{r}}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x} = \cos\theta \cdot \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} \\ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial\theta} \cdot \frac{\partial\theta}{\partial y} = \sin\theta \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}} = (\cos\theta + i\sin\theta)\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta - i\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} =$$

$$= e^{i\theta}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r}e^{i\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} = \underline{\underline{e^{i\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)}}$$

$$\underline{\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial x}} = (\cos\theta - i\sin\theta)\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta + i\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} =$$

$$= e^{-i\theta}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{r}e^{-i\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} = \underline{\underline{e^{-i\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)}}$$

נזכור שאנו מפעילים אופרטור לפלס רק על פונקציות שגזירות (לפחות) פעמיים ברציפות ולכן עבור הפונקציות הנ"ל $\frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial x}$ וכנ"ל לגבי θ, r לכן:

$$\underline{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) = e^{i\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \cdot$$

$$\cdot\, e^{-i\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) = \cancel{e^{i\theta}}\frac{\partial}{\partial r}\cancel{e^{-i\theta}}\frac{\partial}{\partial r} - e^{i\theta}\frac{\partial}{\partial r} \cdot e^{-i\theta}\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} +$$

$$+ \frac{i}{r}e^{i\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}e^{-i\theta}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{r}e^{i\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}e^{-i\theta}\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial r^2} - i\left(-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}\right) + \frac{i}{r}\cancel{e^{i\theta}}\left(-i\cancel{e^{-i\theta}}\frac{\partial}{\partial r} + \cancel{e^{-i\theta}}\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial r}\right) +$$

$$+ \frac{1}{r^2}\cancel{e^{i\theta}}\left(-i\cancel{e^{-i\theta}}\frac{\partial}{\partial\theta} + \cancel{e^{-i\theta}}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \cancel{\frac{i}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}} - \cancel{\frac{i}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}} +$$

$$+ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \cancel{\frac{i}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial r}} - \cancel{\frac{i}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} = \underline{\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}} =$$

$$= \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r} + r\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} = \underline{\underline{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}}}$$

5. צ"ל ש $u(r,\theta)=r\theta\cos\theta + r\sin\theta\ln r$ המוגדרת

ב- $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$ הינה הרמונית ולמצוא צמודה הרמונית.

נציג $z=re^{i\theta}$ אז $\ln z = \ln r + i\theta$

אז $z\ln z = r\cos\theta\cdot\ln r - \theta r\sin\theta + i(r\theta\cos\theta + r\sin\theta\ln r)$

לכן $\underline{u=\mathrm{Im}(z\ln z)}$ ו- $z\ln z$ אנליטית ב- $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$

לכן u הרמונית ב- $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$ וצמודה הרמונית:

$$\underline{v(r,\theta)=r\cos\theta\ln r - \theta\cdot r\sin\theta}.$$

6. $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה וחסומה ב- $\mathbb{R}$, צ"ל כי הפונקציה

$P_u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{(x-t)^2+y^2}u(t)\,dt$ הרמונית בחצי המישור העליון.

נזכור כי אם v רציפה וחסומה, $v:\partial D\to\mathbb{R}$ אז

$V(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1}\frac{1-|z|^2}{|w-z|^2}v(w)\frac{dw}{w}$ הרמונית ב- $|z|<1$.

ראינו בתרגול ש $f(z)=\frac{i-z}{i+z}$ מעתיקה את חצי-המישור

העליון לעיגול D. לכן, $u\circ f^{-1}$ רציפה וחסומה וכן

$u\circ f^{-1}:\partial D\to\mathbb{R}$ לכן, מהמשפט, $U(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1}\frac{1-|z|^2}{|w-z|^2}u\circ f^{-1}(w)\frac{dw}{w}$

הרמונית ב- $|z|<1$. נבצע הצבה $w=f(t)$ אז

$$\underline{U(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-|z|^2}{|f(t)-z|^2}u(t)\frac{df(t)}{f(t)}}$$ הרמונית ב- D

לכן $u\circ f$ הרמונית בחצי המישור העליון.

נשאר להראות ש $\underline{u\circ f=P_u(z)}$ (נעשה בתרגול)

7. צ"ל כי אם f שלמה ומקיימת $0=\lim_{z\to\infty}\frac{\mathrm{Re}f(z)}{z}$ אז

f קבועה. ניזכר בנוסחה: $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=R}\frac{w+z}{w-z}u(w)\frac{dw}{w}+iC$

לכל $|z|<R$, ומכיוון ש f שלמה, נוכל לכתוב אותה

לכל R. נגזור את הנוסחה: $\underline{f'(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{|w|=R}\frac{u(w)}{(w-z)^2}dw}$

f שלמה $\Leftarrow$ f' שלמה. לכן הנוסחה הנ"ל עומדת לכל R.

נתון $\lim_{z\to\infty}\frac{u(z)}{z}=0$, לכן לכל ε קיים R_0 כך שלכל $R>R_0$

אם $|w|=R$ אז $\left|\frac{u(w)}{w}\right|<\varepsilon$ $\Leftarrow$ $|u(w)|<\varepsilon|w|=\varepsilon R$

לכן לכל $R>R_0$: $\underline{|f'(z)|} = \frac{1}{\pi}\left|\int_{|w|=R}\frac{u(w)}{(w-z)^2}dw\right| \le$

$$\le \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|u(Re^{it})|}{|Re^{it}-z|^2}|iRe^{it}|\,dt \le \frac{\varepsilon R^2}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{dt}{|Re^{it}-z|^2} \le$$

נזכור כי $|w-z|^2 \geq (|w|-|z|)^2$ לכן

$$\leq \frac{\varepsilon R^2}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(R-|z|)^2} = \frac{\varepsilon R^2}{\pi(R-|z|)^2}\cdot 2\pi = \frac{2\varepsilon}{\left(1-\frac{|z|}{R}\right)^2} \xrightarrow[R\to\infty]{|z|<R} \underline{\underline{2\varepsilon}}$$

לכן $f''(z)$ חסומה ושלמה לכן, לפי משפט ליוביל

היא קבועה, לכן $\underline{f(z)=az+b}$. נציג $a=a_1+ia_2$!

$b=b_1+ib_2$ אז $f(z)=(a_1x-a_2y+b_1)+i(a_2x+a_1y+b_2)$

עבור $z=x+iy$ לכן $\mathrm{Re}\, f(z)=a_1x-a_2y+b_1$. נדרה ש-$f$

תקיים את התנאי $\lim_{z\to\infty}\frac{\mathrm{Re}\, f(z)}{z}=0$ גמה

$\underline{\lim_{x\to\infty}\frac{a_1x-a_2y+b_1}{x}=a_1=0}$ וכן $\underline{\lim_{y\to\infty}\frac{a_1x-a_2y+b_1}{iy}=-\frac{a_2}{i}=0}$

לכן $a=a_1+ia_2=0$ לכן $\underline{\underline{f(z)=b}}$ - קבועה.

<u>פיתרון</u> נתונה $f: D \to D$ עם $|f(z)|=1$ על $|z|=1$

<u>סעיף 1</u>

הפונקציה $\tilde f$ מוגדרת ע"י

$$\tilde f(z)=\begin{cases} f(z) & |z|\le 1 \\ \dfrac{1}{\overline{f(\frac{1}{\bar z})}} & |z|>1 \end{cases}$$

היא מרומורפית ב $\bar{\mathbb{C}}$

<u>הוכחה</u> נגדיר $H=\{\operatorname{Im} z>0\}$

! $T(z)=\dfrac{i(1-z)}{1+z}$ העתקת מוביוס

אזי $T: D \to H$! $T(|z|=1)=\mathbb{R}$

נגדיר $g(z)=T\circ f\circ T^{-1}(z)$

אזי $g: H\to H$! $g(\mathbb{R})=\mathbb{R}$

לכן פונקציה

$$\tilde g(z)=\begin{cases} g(z) & \operatorname{Im} z\ge 0 \\ \overline{g(\bar z)} & \operatorname{Im} z<0 \end{cases}$$

אנליטית ב $\mathbb{C}$ לפי משפט השיקוף.

נגדיר $\tilde f = T^{-1}\circ \tilde g\circ T$

אזי עבור $|z|\le 1$

$$\tilde f(z)=T^{-1}\circ\tilde g\circ T(z)=T^{-1}g\,T(z)=T^{-1}TfT^{-1}T(z)=$$
$$=f(z)$$

אם $|z|>1$

$$\tilde f(z)=T^{-1}\tilde g\,T(z)=T^{-1}\overline{g(\overline{T(z)})}=T^{-1}\overline{TfT^{-1}(\overline{Tz})}$$

קל לראות ש $\frac{1}{z} = T^{-1}\left(\overline{T(z)}\right)$

לכן $\tilde{f}(z) = T^{-1}\,\overline{Tf\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{f\left(\frac{1}{z}\right)}}$

אנליטית בכל הנקודות חוץ מ' z:
$f\left(\frac{1}{z}\right)=0$ ובנק' האלה יש לכל
היותר קוטב.
ב ∞ יש ל $\tilde{f}$ נק' קוטב או נקודה
סליקה אם $f(0)$ מתאפסת או לא
בהתאם. לכן $\tilde{f}$ מרומורפית ב $\bar{\mathbb{C}}$

ל f יש מספר סופי של אפסים
ב D לכן ל $\tilde{f}$ יש מספר סופי של
קטבים ב $\bar{\mathbb{C}}$. לכן $\tilde{f}$ רציונלית
ולכן f גם כן.